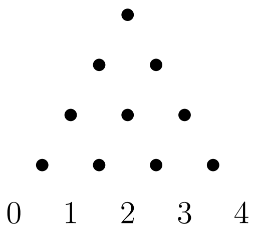
Das Galton-Gitter

An einem Brett werden Hindernisse (z.B. Nägel) in Form eines gleichseitigen Dreiecks angebracht. Der Abstand zweier Nägel innerhalb einer Reihe beträgt 1 cm. Dasselbe gilt für den Abstand zweier Zeilen des Dreiecks. Das Ergebnis ist ein Galton-Gitter. In der folgenden Abbildung sehen Sie eine Skizze für die Höhe vier:



Auf die obere Verzweigung fällt eine Kugel. Sie wählt an jeder Verzweigung gleich wahrscheinlich den Weg nach rechts (wir notieren es im Binärsystem durch eine „1") oder links (wir notieren es durch eine „0") und landet unten in einer der Boxen 0 bis 4. Durch ein 4-Tupel (a_1, a_2, a_3, a_4) mit $a_i \in \{0, 1\}$ wird die Auswahl der Richtung an den Verzweigungen 1 bis 4 notiert.

Aufgabe 1 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Kugel den Weg $(0, 0, 1, 0)$? Folgern Sie hieraus die Wahrscheinlichkeit für beliebige Pfade.

b) Das Gitter wird so um Zeilen erweitert, dass in der Fußzeile die Zahlen von 0 bis 7 vertreten sind. Wie groß ist hier die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Pfad zu durchlaufen?

c) Bestimmen Sie für die Gitter der Höhe $n = 2, 4, 7$ jeweils die Anzahl der Möglichkeiten, einen Pfad von der Spitze an dieselbe Stelle zu finden.

> **Hinweis.** Notieren Sie die Pfade im Binärsystem und finden Sie einen Zusammenhang zu Permutationen.

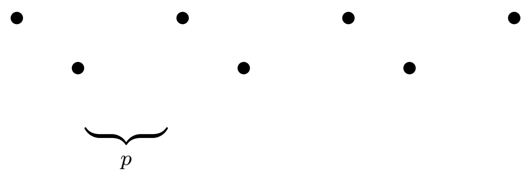
d) Das Galton-Gitter lässt sich unter Tabellenkalkulation simulieren. Hierfür benötigen wir Zufallszahlen 0 oder 1. Simulieren Sie diese Berechnungen für $n = 2, 4, 7$ mit 100 Zufallszahlen. Stellen Sie die Häufigkeiten der erreichten Boxen 0 bis 4 in Form eines Histogramms dar.

> **Hinweis.** Verwenden Sie den Befehl `=rand(0,1)`.

Erklären Sie das Ergebnis und schließen Sie auf die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis X: „Die Kugel erreicht die Box $r = 0, 1, 2, 3, 4$."
Formulieren Sie eine Vermutung bzgl. der Verteilung der Ziele für beliebiges n.
Beweisen Sie diese Vermutung.

e) Lassen Sie ClassPad in einer Spalte die Summe aller bisherigen Ergebnisse von Boxen nach jedem Wurf berechnen. Dividieren Sie die Werte durch die bisherige Anzahl von Würfen und stellen Sie die Ergebnisse in Abhängigkeit von der bisherigen Anzahl von Würfen graphisch dar. Deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 Im Gitter mit dem Abstand 1 benachbarter Nägel einer Zeile werden nun zwei aufeinander folgende Zeilen so verschoben, dass die Abstände wie folgt sind:



a) Begründen Sie, warum man annehmen kann, dass die Kugel an einer Verzweigung mit einer Wahrscheinlichkeit von p den Weg nach links nimmt. (Gehen Sie davon aus, dass die Kugel an jeder Verzweigung senkrecht auftrifft.)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Pfade $(0, 0, 1, 0)$ und $(1, 0, 1, 1)$ der Kugel im Gitter. Notieren Sie dann eine allgemeine Regel für die Wahrscheinlichkeit eines Pfads.

Ein Gitter mit $p(1) > \frac{1}{2}$ des Wegs nach rechts lässt sich mithilfe des ClassPad simulieren. ($p(0)$ bezeichnet ab jetzt die Wahrscheinlichkeit für den Weg nach links.) Hierbei ist zu bedenken, dass der ClassPad mit `rand()` Zufallszahlen des Intervalls $[0; 1]$ ausgibt. Multipliziert man eine Zufallszahl des Intervalls $[0; 1]$ mit 2, so liegt sie im Intervall $[0; 2]$. Die Zahl 2 tritt als Zufallszahl höchst selten auf, wird daher in der folgenden Rechnung nicht berücksichtigt. Damit hat man gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[0; 2[$. Rundet man diese Zahlen ab, so treten eine 0 und eine 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

Multipliziert man vorher jedoch die Zufallszahlen des Intervalls $[0; 2[$ mit einer Zahl $\frac{1}{2} < b < 1$, so liegen die Zufallszahlen im Intervall $[0; 2b[$ und es gilt für die Wahrscheinlichkeiten $p(0)$ und $p(1)$

$$p(0) = \frac{2b-1}{2b} \quad \text{und} \quad p(1) = \frac{1}{2b}\,.$$

c) Wie groß ist b für vorgegebene Wahrscheinlichkeiten $p(0)$ und $p(1)$ zu wählen? Zeigen Sie, dass gilt:

$$p(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}\,.$$

Ziehen Sie hiermit Rückschlüsse auf die allgemeine Formel mit

$$p(1) = \frac{x}{y} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{y-x}\,.$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Ergebnisse X aus den Aufgaben 1 und 2. Erklären Sie anschaulich ihre Bedeutung.